Musterlösungen
2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

1. **a)** Gradient:

$$\nabla f(x,y) = (1 - \frac{1}{y}, 2y + \frac{x}{y^2})$$

Richtungsableitung im Punkt $(1, \frac{1}{2})$ in Richtung $(1,1)$ ist

$$\langle \nabla f(1, \frac{1}{2}), (1,1) \rangle \frac{1}{|(1,1)|} = 2\sqrt{2}$$

b) Die Richtungsableitung ist minimal in Gegenrichtung zum Gradienten, d.h. in Richtung $-\nabla f(1, \frac{1}{2}) = (1, -5)$. Das Minimum hat den Wert $-|\nabla f(1, \frac{1}{2})| = \sqrt{26}$.

c) Ein Tangentialvektor an die Niveaulinie steht senkrecht auf ∇f und hat keine Komponente in z-Richtung, wähle also etwa $(5, 1, 0)$.

d) Kritischer Punkt: $\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (-2, 1)$
Hessematrix:

$$H(x,y) = \partial_{ij} f(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{y^2} & 2 - \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}, \quad H(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(H - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda - 1 = \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \pm \sqrt{10}$$

Da die Eigenwerte unterschiedliches Vorzeichen haben, ist der kritische Punkt ein Sattelpunkt.

2. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \ln u \\ v \\ uv \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \ln z - x \\ \ln z - \ln y \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Tangentialebene

$$T(u,v) = f(1,2) + Df(1,2)\begin{pmatrix} u-1 \\ v-2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-1 \\ v-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u-2 \\ v \\ 2u+v-2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass die Koordinatengleichung gegeben ist durch $z = x + y$ mit $x = 2u - 2$ und $y = v$.

b) Erste Näherung: $f(1.01, 1.98) \approx T(1.01, 1.98) = (0.02, 1.98, 2)$

c) Bestimmung der Ableitung $Dh = Dg(f)$ unter Verwendung der expliziten Darstellung von h:

h lässt sich folgendermassen schreiben:

$$h = g(f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto g(f(u,v)) = g(v\ln u, v, uv) = \begin{pmatrix} v\ln u \\ \ln u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial v}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ln v + 1 \\ 1/v & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} dh &= dg\Big|_{f(u,v)} df\Big|_{(u,v)} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \ln z & y/z \\ 0 & -1/y & 1/z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v/u & \ln u \\ 0 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \ln v + 1 \\ 1/u & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Für die Substitutionsregel benötigen wir die Jacobimatrix der Transformationsfunktion

$g(u,v) = \begin{pmatrix} v/u \\ v^2/u \end{pmatrix}$:

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Dg(u,v) = -\frac{v^2}{u^3}$$

Also

$$F = \iint_{1\le\frac{y}{x}\le 2, 1\le\frac{y}{x^2}\le 3} 1\,dxdy = \iint_{1\le v\le 2, 1\le u\le 3} \frac{v^2}{u^3}dudv = \frac{28}{27}$$

4. **a)** $\operatorname{rot} F_1(x,y) = \partial_x(-x^3) - \partial_y(x^2y) = -4x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ nicht wirbelfrei
$\operatorname{rot} F_2(x,y) = \partial_x(x\ln x) - \partial_y(y(\ln x + 1)) = 0 \quad \Rightarrow$ wirbelfrei

F_1 kein Potentialfeld, da nicht wirbelfrei
F_2 Potentialfeld mit Potential $V(x,y) = yx\ln x \quad (x > 0)$

Siehe nächstes Blatt!

b) F_2 Potentialfeld $\Rightarrow \quad \int_\gamma F_2 = V(2,1) - V(1,1) = 2\ln 2$
Für F_1 parametrisieren wir die Teilkurven durch $\gamma_1(t) = (1,t), 1 \le t \le 2$ bzw. $\gamma_2(t) = (t, \frac{2}{t}), 1 \le t \le 2$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F_1 &= \int_1^2 F_1(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt + \int_1^2 F_1(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)dt \\ &= \int_1^2 -1^3 dt = \int_1^2 ((t^2 \cdot \frac{2}{t}) \cdot 1 + (-t^3)(-\frac{2}{t^2}))dt = -1 + 6 = 5\end{aligned}$$

Wir ergänzen γ durch die Strecke γ_3 von $(2,1)$ nach $(1,1)$ zu einem geschlossenen Weg, und berechnen

$$\int_{\gamma_3} F_1 = \int_2^1 t^2 dt = -\frac{7}{3}$$

Das Integral entlang des geschlossenen Weges ist also gleich $5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$. Bezeichnen wir das eingeschlossene Gebiet mit G, ergibt sich für

$$-\int_G \operatorname{rot} F_1 dxdy = -\int_1^2 \int_1^{2/x} -4x^2 dydx = \frac{8}{3}$$

nach dem Satz von Stokes derselbe Wert (beachte Orientierung!).

5. Der Fluss ist definiert durch $\int_{\partial B} F \cdot \nu dS$

Wähle $F(x,y,z) = \frac{3}{\pi}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} F = \frac{3}{\pi}$. Nach dem Satz von Gauss ergibt sich für den Fluss durch die Einheitskugel B (mit beliebigem Zentrum)

$$\int_{\partial B} F \cdot \nu dS = \int_B \operatorname{div} F dV = 4$$